

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ – ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

И.И. Гладкий, А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов (Брест, Беларусь)

В работе рассматривается стохастическая модель процесса многолетних колебаний речного стока, представленная в виде системы дифференциальных уравнений [1], [2]:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\frac{d\theta_i}{d\xi}(+\infty) = 0, \quad \theta_i(\xi_*) = 0, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Эта модель, широко используемая в стохастической гидрологии, получена на основе уравнения Фоккера-Планка, при некоторых условиях на переходную функцию плотности вероятности. Для решения системы (1) использовались численные методы, например, в [1]. В данной работе получено решение системы (1), записанное в виде степенных рядов:

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*), \quad \theta_2(\xi) = 2(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)),$$

где

$$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!!k}, \quad (2)$$

$$S_2(\xi) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \left[\ln \left(2 - 2 \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \right) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \frac{1}{m - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \right] \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!!k}, \quad (3)$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная часть числа t соответственно.

Степенной ряд (2) получен в [2]. Предлагаемая там же методика решения уравнений вида (1) обобщена на более широкий класс уравнений такого типа, для чего были исследованы функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией. В данной работе также исследовано асимптотическое поведение ряда (2) и исследована сходимость рядов (2), (3). Для решения ряда прикладных задач получены условия для вычисления значений рядов с заданной точностью.

Литература

1. Найденов, В.И., Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – 2002. – Т. 29, № 1. – С. 62-67.
2. Волчек, А.А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А.А. Волчек [и др.] // Вестник Брестского государственного технического университета. Сер. физика, математика, информатика. – 2010. – № 5 – С. 49-54.